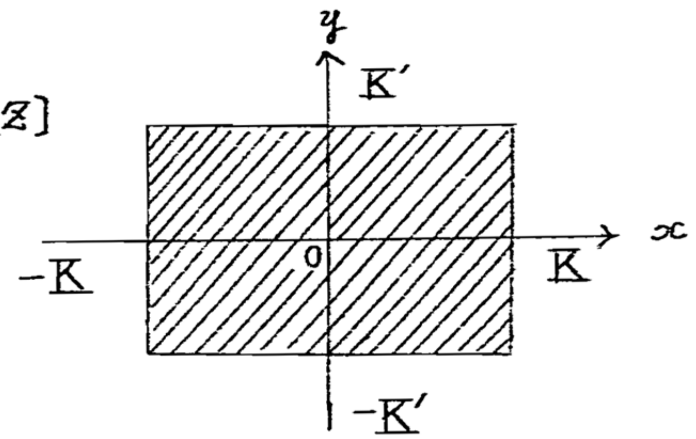
507. Jacobi ノ楕円函數($0<K<1$)ニヨル一二ノ簡單ナ寫像

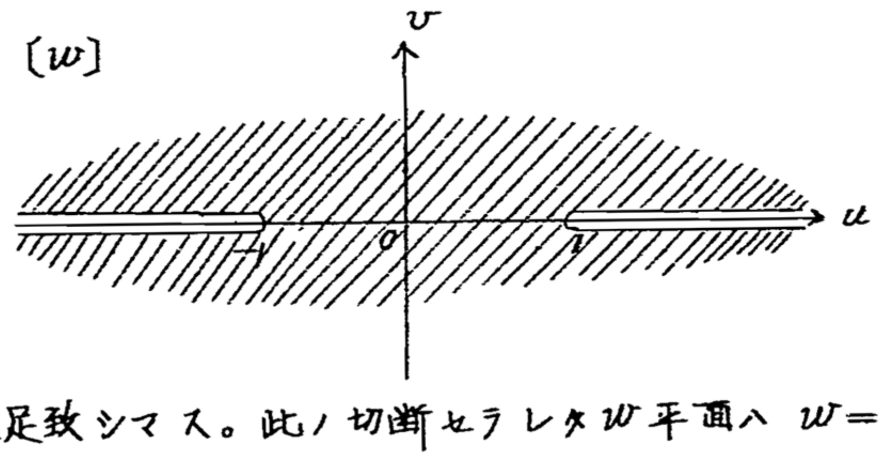
黒田　稲夫(山形)

松村勇夫氏ノ御注意有益ニ拝讀致シマシタ。紙上ヲ以テ深謝イタシマス。

晩秋初冬ノ早イ山形ノ山々ハモウ白衣ヲ纒ヒ始メマシタ。張替ヘタバカリノ障子ノ格子ヲ眺メナガラ次ノヤウナコトヲヤツテミマシタ。初期學生ノ方々ガ楕円函數ノ諸公式ヲ運用セラレルコトニ幾ラカデモ役立タバ幸甚デアリマス。

先ヅ $w = \mathrm{sn}\, z$ ニヨル寫像



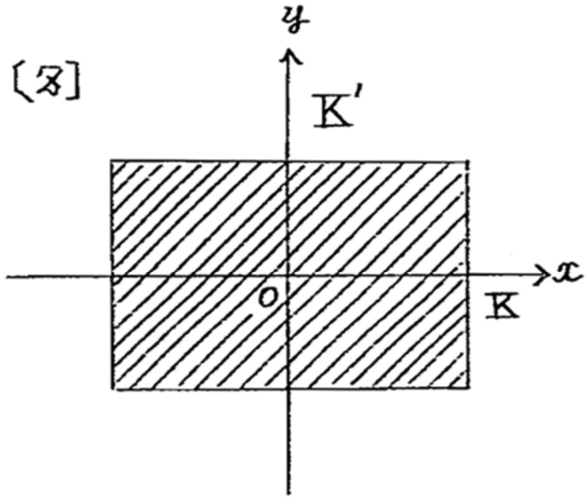


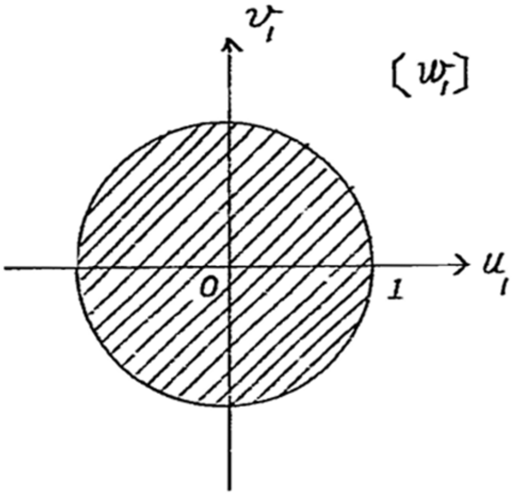
カラ発足致シマス。此ノ切断セラレタ w 平面ハ $w = \frac{2w_1}{1+w_1^2}$ ニヨツテ w_1 平面ノ単位円内ニ寫像セラレマスカラ

$$\mathrm{sn}\,z = \frac{2w_1}{1 + w_1^2}$$

或ハ $$w_1 = \frac{1 - \mathrm{cn}\,z}{\mathrm{sn}\,z} = \frac{\mathrm{sn}\,z}{1 + \mathrm{cn}\,z}$$

ニヨツテ次ノ寫像ガ得ラレマス。



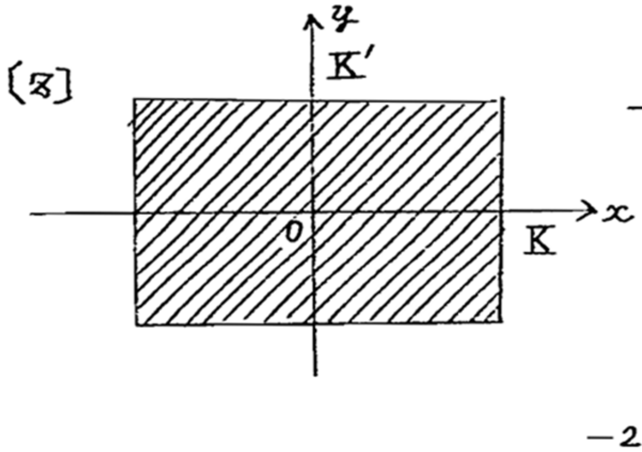


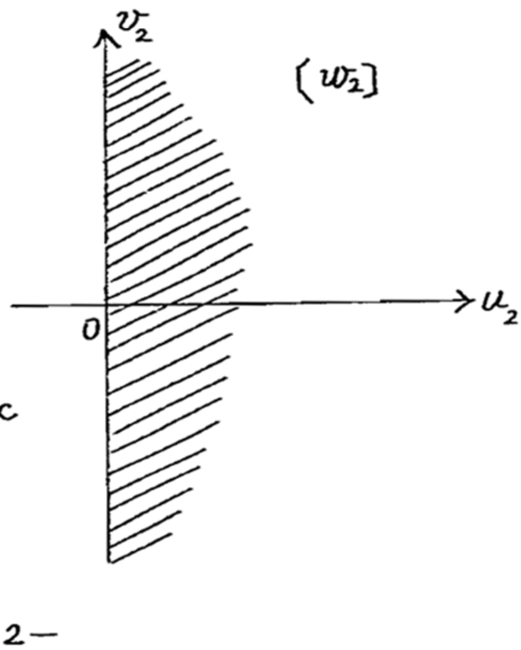
(1) $$w_1 = \frac{\mathrm{sn}\,z}{1 + \mathrm{cn}\,z}$$

更ニ此ノ單位円内ハ $w_2 = \frac{1 - w_1}{1 + w_1}$ ニヨツテ w_2 平面ノ虚軸ノ右半平面ニ寫像セラレマスカラ

$$w_2 = \frac{1 - \frac{\mathrm{sn}\,z}{1 + \mathrm{cn}\,z}}{1 + \frac{\mathrm{sn}\,z}{1 + \mathrm{cn}\,z}} = \frac{\mathrm{cn}\,z}{1 + \mathrm{sn}\,z}$$

ニヨツテ次ノ寫像ガ得ラレマス。



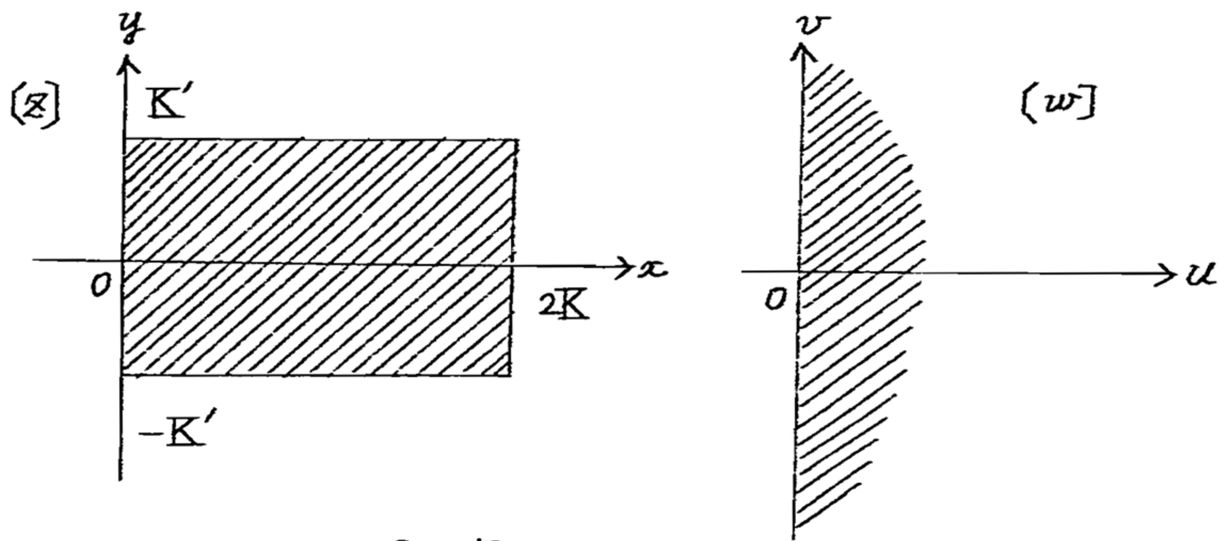


(2) $w_2 = \dfrac{cn\, z}{1 + sn\, z}$

コヽニ於テ $z' = z + K$ ト置イテ z 平面ノ平行移動ヲ行ヒマスト (2) ハ

$$w_2 = \frac{\dfrac{K' sn\, z'}{dn\, z'}}{1 - \dfrac{cn\, z'}{dn\, z'}} = \frac{cn\, z' + dn\, z'}{K' sn\, z'}$$

トナリマスカラ又 $w_2' = \dfrac{1}{K' w_2}$ ト置キ終ニ w_2', z' ヲ w, z ト書キ改メマスト次ノ寫像ガ得ラレマス。

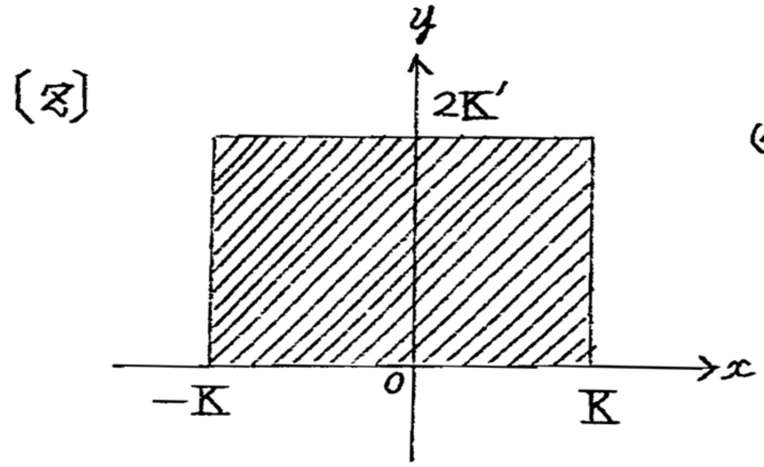


(3) $w = \dfrac{sn\, z}{cn\, z + dn\, z}$

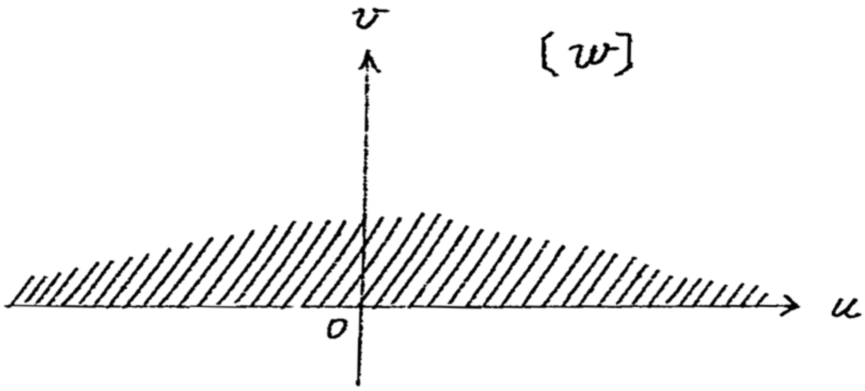
更ニ $z' = iz$, $w' = iw$ ト置イテ z, w 両平面ノ廻轉ヲ行ヒマスト (3) ハ

$$-iw' = \frac{-i\dfrac{sn(z', K')}{cn(z', K')}}{\dfrac{1}{cn(z', K')} + \dfrac{dn(z', K')}{cn(z', K')}} = \frac{-i\, sn(z', K')}{1 + dn(z', K')}$$

トナリマスカラ再ビ w', z' ヲ w, z ト書キ改メ且ツ K' ノ代リニ K ヲ用ヒルコトニシマスト次ノ寫像ガ得ラレマス。



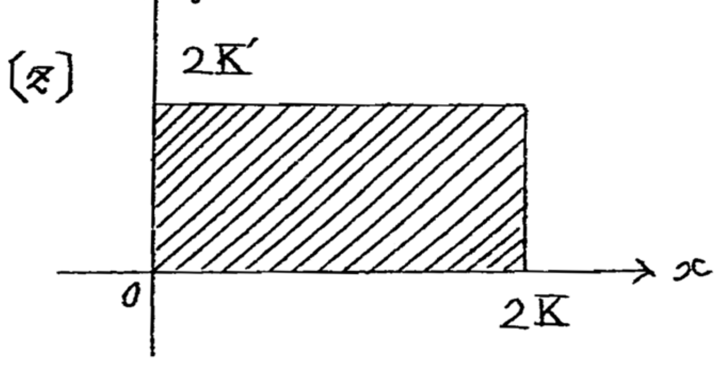
(4) $w = \dfrac{sn\, z}{1+dn\, z}$



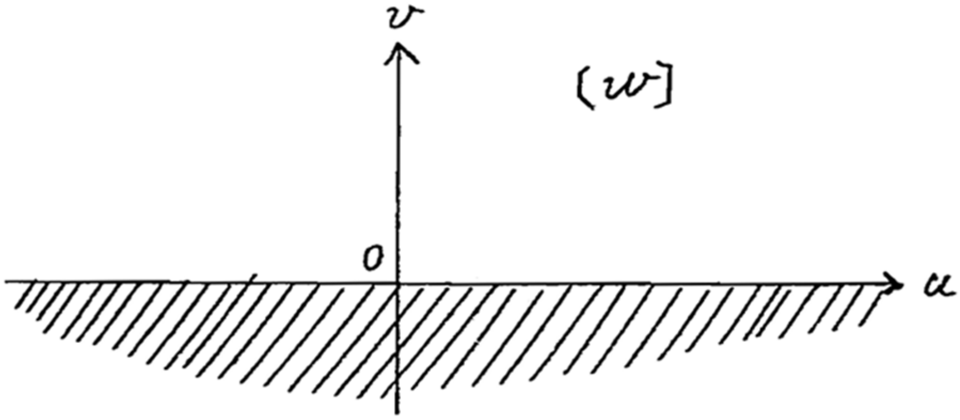
ドウモ甚ダシク単調デアリマスガ最後ニ今一度 $z'=z+K$, $w'=-w$ ト置キマスト (4) ハ

$$-w' = \frac{-\dfrac{cn\, z}{dn\, z}}{1+\dfrac{K'}{dn\, z}} = \frac{-cn\, z'}{K'+dn\, z'}$$

トナリマスカラ又 w', z' ノ代リニ w, z ト書クト次ノ寫像ガ得ラレマス。



(5) $w = \dfrac{cn\, z}{K'+dn\, z}$



コンナヤウニシテ幾ラモ $\mathrm{sn}\,z$, $\mathrm{cn}\,z$, $\mathrm{dn}\,z$ ノ簡単ナ結合ト其ノ函数ニヨル写像ヲ探索スルコトガ出来マセウ。

k ノ値ヲ適当ニ選ビマスト縦横ノ比 $\frac{K'}{K}$ ガ随意ナル矩形ヲ (1) 乃至 (5) ニヨツテ単位円内又ハ半平面ヘ写像スルコトガ出来マス。ソコデ k ノ函数 $t=\frac{K'}{K}$ ノ表スベキ曲線ヲ追跡シテミマス。先ヅ第一ニ

$$\frac{dt}{dk}=\frac{\pi}{2K^2kk'^2}<0$$

ガ求メラレマスカラ曲線ハ常ニ下降シ且ツ $k\to 1$ ノトキ $\frac{dt}{dk}\longrightarrow-\infty$ トナリマス。又引続イテ次ノモノガ得ラレマス。

$$\frac{d^2t}{dk^2}=\frac{\pi\{2E-(1+k^2)K\}}{2K^3k^2k'^4}$$

$$=\frac{\pi}{2K^3k^2k'^4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-k^2(1+2\sin^2\theta)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta$$

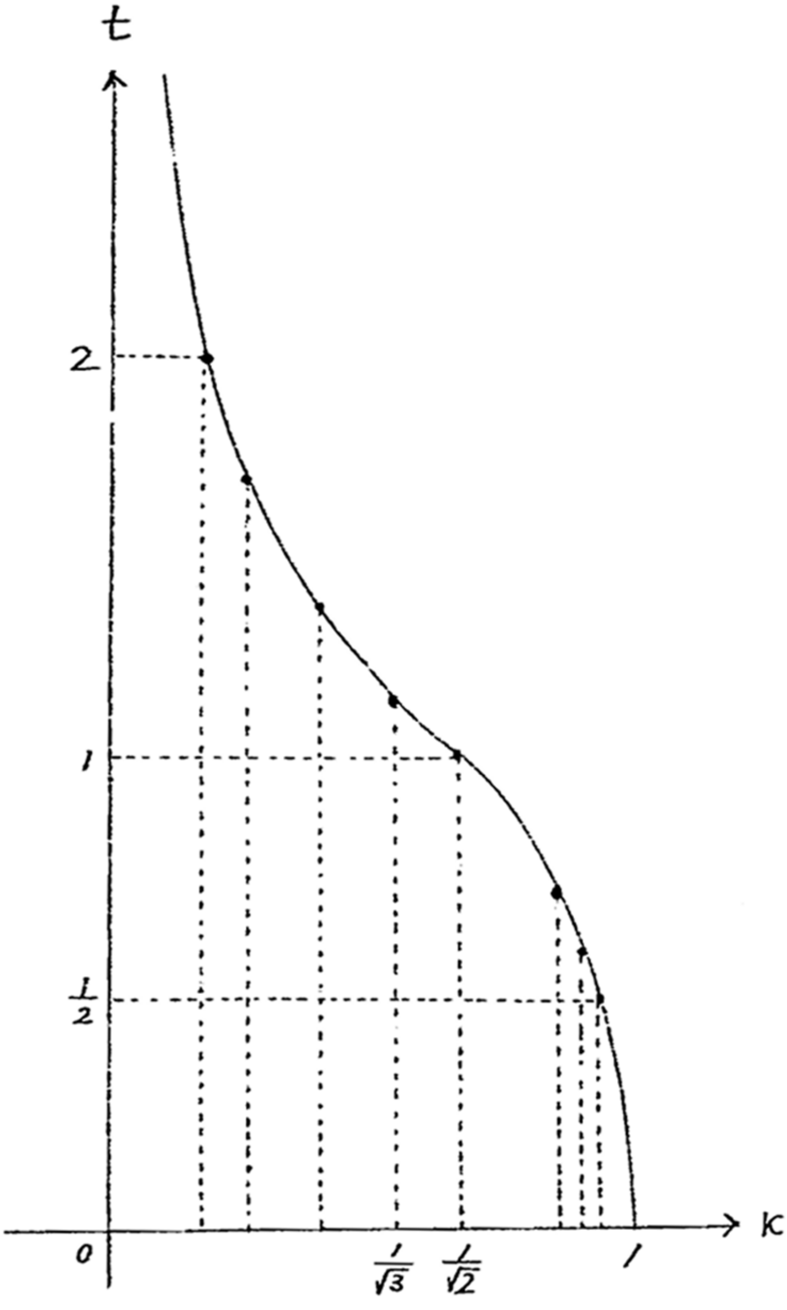
$$\frac{d^3t}{dk^3}=\frac{dt}{dk}\left\{\frac{(1+k^2)^2}{2k^2k'^4}+\frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2t}{dk^2}}{\frac{dt}{dk}}\right)^2\right\}<0$$

ソレ故ニ $\frac{d^2t}{dk^2}$ ハ常ニ減少シ $k \leqq \frac{1}{3}$ ナラバ $\frac{d^2t}{dk^2}>0$, $k \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ナラバ $\frac{d^2t}{dk^2}<0$ デアリマスカラ曲線ハ $\frac{1}{\sqrt{3}}<k<\frac{1}{\sqrt{2}}$ ナル如キ一ツノ k ニ對應スル唯一ツノ彎曲点ヲ有シマス。

尚関係

k	0	$3-\sqrt{8}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2\sqrt{2}-2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$	$\frac{5}{2^4(\sqrt{2}-1)}$	1
t	∞	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	0

ヲ顧慮シテ次ノ曲線ガ得ラレマスガ Cayley氏ノ An elementary treatise on elliptic functions (1876), P.44 ニ掲載ノモノトハ稍々異ナル結果ニナリマシタ。尤モコンナコトハモウ疾クノ昔ニ解決済ミニテ蛇足ニ過ギナイノデアリマセウケレドモ私ノ手許ニハ比較シテ見ルモノガ他ニアリマセンノデ一寸當ッテミテ頂キ度ウゴザイ



マス。

昭和11年7月―12月分ノ會費金貳円也ヲ至急御拂込ミ願ヒマス。

大阪市北區

大阪帝國大學
理學部數學教室　清水辰次郎

振替口座番號　大阪一七七四三番